ANALISI II

PROF. MICHELETTI

26/09/11

FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \quad i = 1 \dots n\}$$

$\mathbb{R}^n$ SPAZIO METRICO $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2} = |x-y|_{\mathbb{R}^n}$$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

SPAZIO METRICO

X, d

$d : X \times X \to \mathbb{R} = \{a \in \mathbb{R} \; a \geq 0\}$

$d(x,y) = d(y,x)$

$d(x,y) = 0 \iff x = y$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$x_0 \in \mathbb{R}^m$ E CONSIDERO

$$B(x_0^\circ, R) = \{x \in \mathbb{R}^m : d(x, x_0^\circ) < R\}$$

APERTO ↓ — ↑ $<$ CHIUSO

↓ PALLA CENTRO x_0 E RAGGIO R

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

$B(x_0^\circ, R)$ SI DICE ANCHE INTORNO SFERICO DI x_0

$$d(x, x_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^\circ)^2} = |x - x_0|$$

DOVE $x = (x_1, \dots, x_m)$

$x^\circ = (x_1^\circ, \dots, x_m^\circ)$

SIA E UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}^m$ E SIA $x_0 \in \mathbb{R}^m$, ALLORA:

- x_0 É <u>INTERNO</u> AD E SE ESISTE UN INTORNO SFERICO DI x_0 CONTENUTO IN E.
- x_0 É <u>ESTERNO</u> AD E SE ESISTE UN INTORNO SFERICO DI x_0 CONTENUTO IN $\mathbb{R}^m - E$
- x_0 É DI <u>FRONTIERA</u> PER E SE OGNI INTORNO SFERICO DI x_0 CONTIENE ALMENO UN PUNTO DI E E ALMENO UN PUNTO DI $\mathbb{R}^m - E$

- E È APERTO SE OGNI SUO PUNTO È INTERNO
- E È CHIUSO SE IL SUO COMPLEMENTARE $\mathbb{R}^n - E$ È APERTO
- E È CHIUSO $\Leftrightarrow$ CONTIENE I PROPRI PUNTI DI FRONTIERA
- SE E È APERTO NON HA PUNTI DI FRONTIERA
- $\emptyset \in \mathbb{R}^n$ PER DEFINIZIONE SONO APERTI E CHIUSI

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

ESEMPIO

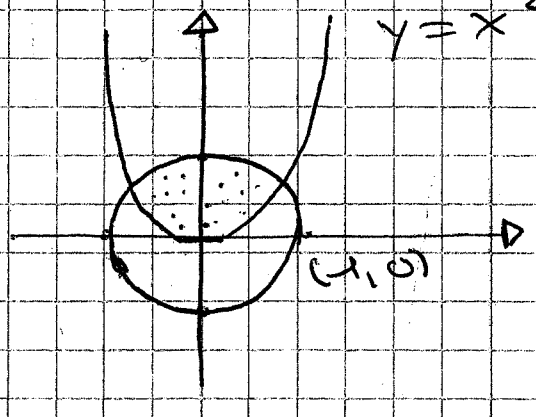
$E = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1 \in x^2 < y\}$ NON È APERTO NON È CHIUSO

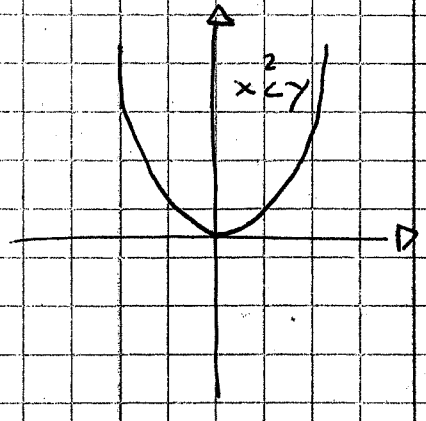
$(1,0)$ PUNTO ESTERNO AD E

$(0,1/2)$ PUNTO INTERNO AD E

I PUNTI (x,y) T.C. $x^2+y^2<1 \in y=x^2$ DI FRONTIERA NON APPARTENGONO AD E

I PUNTI (x,y) T.C. $x^2+y^2=1 \in x^2<y$ SONO DI FRONTIERA E APPARTENGONO AD E





- UN SOTTOINSIEME SI DICE CONNESSO SE PER OGNI COPPIA DI PUNTI ESISTE UNA CURVA CONTINUA CHE LI UNISCE

$A \subset \mathbb{R}^n$

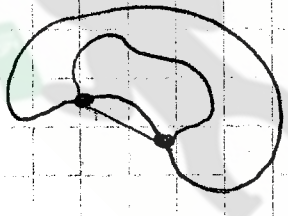
SE $P \in Q \in A$ ESISTE UNA CURVA CHE UNISCE $P \in Q$ CHE STA TUTTA IN A

- UN SOTTOINSIEME SI DICE CONVESSO SE PRESI 2 PUNTI C'È UN SEGMENTO CHE LI UNISCE

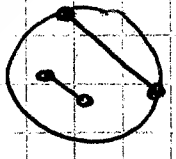
$C \subset \mathbb{R}^n$

SE $P \in Q \in C$ ANCHE IL SEGMENTO CHE UNISCE $P \in Q$ È IN C

MASTER COPY
Tel. 388/9837745



CONNESSO MA NON CONVESSO



CONNESSO

CONVESSO $\Rightarrow$ CONNESSO

IL VICEVERSA NON È DETTO

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

LIMITI

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}^m \quad x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$

$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ PER DEFINIZIONE SIGNIFICA

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \forall x \neq 0 \ d(x, x_0) = |x - x_0|_{\mathbb{R}^m} < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$$|x - x_0|_{\mathbb{R}^m} = \sqrt{\sum_{i=0}^{m} (x_i - x_i^0)^2}$$

$f: D \to \mathbb{R} \qquad D \subset \mathbb{R}^2$

ESISTE $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y)$? SE ESISTE QUANTE?

CONSIDERO LE RETTE PASSANTI PER IL PUNTO (x_0, y_0)

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y = y_0 + m(x - x_0)$